Misurare il rischio finanziario con l'Extreme Value Theory

M. Bee

Dipartimento di Economia, Università di Trento

MatFinTN 2012, Trento, 24 gennaio 2012

Outline

Introduzione

Extreme Value Theory

EVT e rischio finanziario

Applicazioni

Estensioni e conclusioni

Risk measurement

- Il risk measurement è la disciplina che studia i portafogli finanziari modellandoli come variabili aleatorie.
- La competenze principali sono dunque di tipo matematico-statistico e finanziario.
- Le metodologie standard di risk measurement parametrico sono per lo più basate sulla normalità dei rendimenti logaritmici degli asset.
- Questa ipotesi è matematicamente e teoricamente conveniente ma insoddisfacente dal punto di vista empirico.
- Se si vuole abbandonare l'ipotesi di normalità, possibili soluzioni sono modelli parametrici ad hoc (Student t, GED, distribuzioni iperboliche generalizzate,...) o l'Extreme Value Theory (EVT).

Extreme Value Theory

- La df della Generalized Pareto Distribution (GPD) è data da

$$G_{\xi,\beta}(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi x}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}}, & \xi \neq 0 \\ 1 - \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right), & \xi = 0, \end{cases}$$

  dove $\beta > 0$, $x \geq 0$ quando $\xi \geq 0$ e $0 \leq x \leq -\beta/\xi$ quando $\xi < 0$.
- Generalizzata perché:
  1. quando $\xi > 0$, coincide con la Pareto con $\alpha = 1/\xi$ e $\kappa = \beta/\xi$;
  2. quando $\xi = 0$, coincide con l'esponenziale;
  3. quando $\xi < 0$, coincide con la Pareto di tipo II;

Extreme Value Theory

- Data una successione (X_n) di variabili aleatorie (v.a.) iid, il teorema di Fisher-Tippett-Gnedenko dà la distribuzione asintotica della v.a. $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$.
- Teorema (Fisher-Tippett-Gnedenko). Sia (X_n) una successione di v.a. iid. Se esistono costanti di normalizzazione c_n e d_n e una df non degenere H tale che

$$c_n^{-1}(M_n - d_n) \xrightarrow{d} H,$$

allora H è la df della Generalized Extreme Value (GEV) Distribution, data da:

$$H_{\xi,\beta}(x) = \begin{cases} \exp(-(1+\frac{\xi x}{\beta})^{-\frac{1}{\xi}}), & \xi \neq 0 \\ \exp(-\exp(-\frac{x}{\beta})), & \xi = 0, \end{cases}$$

dove $\beta > 0$, $x > \mu - \beta/\xi$ quando $\xi > 0$, $x \in \mathbb{R}$ quando $\xi = 0$ e $x < \mu - \beta/\xi$ quando $\xi < 0$.

Extreme Value Theory

- Generalizzata perché:
  1. quando $\xi > 0$, coincide con la Fréchet;
  2. quando $\xi = 0$, coincide con la Gumbel;
  3. quando $\xi < 0$, coincide con la Weibull;
- Data una v.a. con df F, la df degli eccessi sopra la soglia u è data da:

$$F_u(x) = P(X - u \leq x | X > u) = \frac{F(x+u) - F(u)}{1 - F(u)}.$$

- Teorema (Pickands-Balkema-de Haan). E' possibile trovare una funzione misurabile positiva $\beta(u)$ tale che

$$\lim_{u \to x_F} \sup_{0 < x < x_F - u} |F_u(x) - G_{\xi,\beta(u)}(x))| = 0$$

se e solo se $F \in MDA(H_\xi)$, dove MDA sta per dominio di attrazione dei massimi e $x_F = \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) < 1\}$.

GEV e GPD

- Informalmente, per u "grande" (cioè nella coda della distribuzione), la distribuzione degli eccessi sopra u è approssimativamente GPD.
- Osservazione. Le v.a. per cui la distribuzione asintotica dei massimi normalizzati è data dalla GEV (per qualche ξ) sono esattamente le v.a. per cui le distribuzioni degli eccessi convergono alla GPD. Inoltre, quando F è a code pesanti, la distribuzione asintotica GPD è caratterizzata da $\xi > 0$. Quindi, uno stimatore del parametro di forma ξ della GPD è uno stimatore del tail index ξ della GEV.

Extreme Value Theory e probabilità di coda

- Tra le distribuzioni più note:
  1. La Pareto e la Cauchy sono nel dominio di attrazione della Fréchet ($\xi > 0$);
  2. La Normale, l'Esponenziale, la Gamma e la Lognormale sono nel dominio di attrazione della Gumbel ($\xi = 0$);
  3. La Weibull e le distribuzioni con $x_F < +\infty$ sono nel dominio di attrazione della Weibull ($\xi < 0$);
- Sia $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$ e si supponga che, per una soglia u sufficientemente grande, $F_u(x) = G_{\xi,\beta(u)}(x)$. Allora si dimostra che

$$\begin{aligned} \bar{F}(x) &= \bar{F}(u)\left(1 + \xi\frac{x-u}{\beta}\right)^{-1/\xi} \\ &= \bar{F}(u)\bar{G}_{\xi,\beta}(x-u). \end{aligned} \tag{1}$$

Il metodo POT

- Il metodo di stima della coda tramite la GPD prende il nome di Peaks Over Threshold (POT) e si basa sui seguenti passi:
    1. Stimare ξ e β (per esempio tramite il metodo della massima verosimiglianza) utilizzando gli eccessi $y_i = x_i - u$.
    2. Stimare $\bar{F}(u)$ in modo non-parametrico: $\hat{\bar{F}}(u) = n_u/n$, dove $n_u = \sum_{i=1}^{n} I_{\{x_i > u\}}$ e n è la numerosità campionaria totale.
    3. Inserire le stime ottenute in (1) ottenendo così una stima di $\bar{F}(x)$.
    4. Dalla versione stimata della (1), una stima del quantile x_p, cioè del VaR al livello p, è data da

$$\hat{x}_p = u + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}} \left[\left(\frac{n(1-p)}{n_u} \right)^{-\hat{\xi}} - 1 \right].$$

Il metodo POT

- Per la scelta di u, è spesso suggerito un approccio grafico. Per la GPD, la funzione di eccesso è lineare:

$$e(u) = E(X - u | X > u) = \frac{\beta + \xi u}{1 - \xi}.$$

- Definendo la funzione di eccesso empirica:

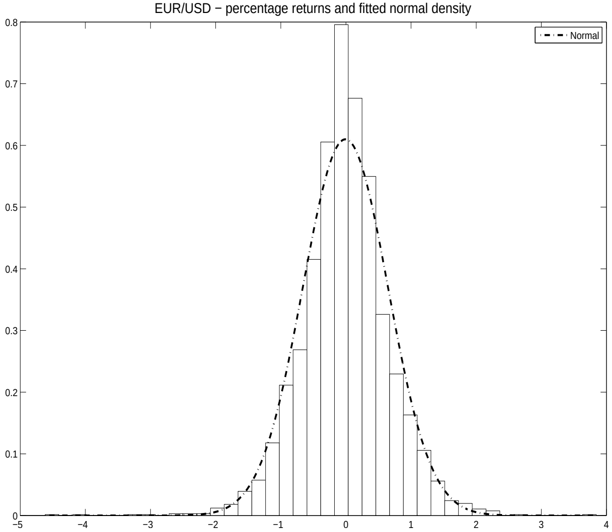
$$e_n(u) = \frac{1}{n_u} \sum_{x_i > u} (x_i - u),$$

  si sceglie il più piccolo valore di u per cui la funzione è approssimativamente lineare.
- Una soluzione migliore consiste nell'iniziare con un valore di u molto grande e controllare la sensitività delle stime a valori via via più piccoli di u, fermandosi quando le stime diventano ragionevolmente stabili.

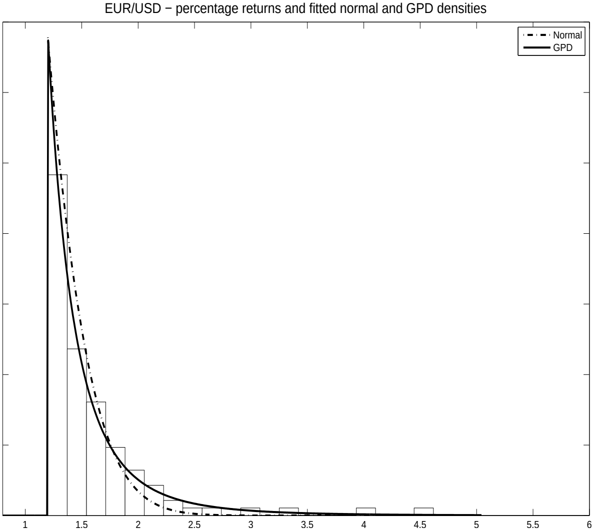
Applicazione 1

- Utilizziamo la distribuzione normale e la GPD per calcolare la probabilità di coda.
- Dati utilizzati: serie storica giornaliera dei rendimenti logaritmici del tasso di cambio EUR/USD per il periodo 1 gennaio 2000 - 31 dicembre 2011 ($n = 3130$, curtosi empirica $= 5.49$).
- Stime dei parametri:
  1. Normale: $\hat{\mu} = -0.007$, $\hat{\sigma} = 0.654$;
  2. GPD: $\hat{\xi} = 0.273$, $\hat{\beta} = 0.293$, utilizzando $u = 0.012$, che implica $n_u = 109$;

Applicazione 1



Applicazione 1



Applicazione 1

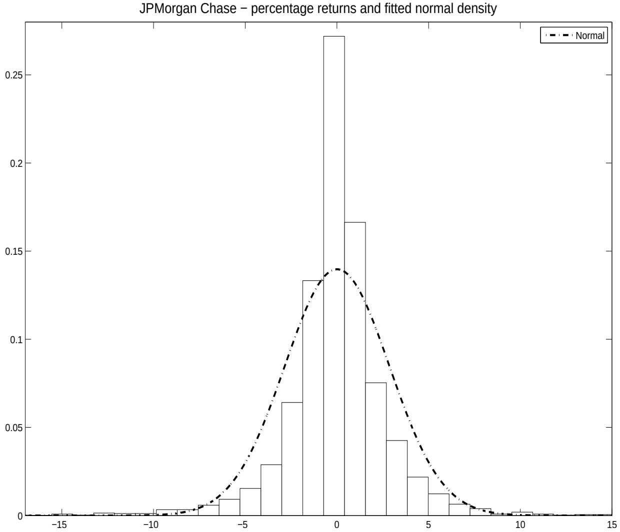
Tabella 1. EUR/USD: Probabilità di coda $P(r < c)$ e percentuali osservate per varie soglie c.

c	-1	-1.25	-1.5	-1.75	-2	-2.25	-2.5
Normal	6.45	2.87	1.12	0.39	0.12	0.03	< 0.01
GPD	-	2.95	1.41	0.77	0.45	0.29	0.19
Observed	5.78	2.84	1.56	0.77	0.42	0.26	0.19

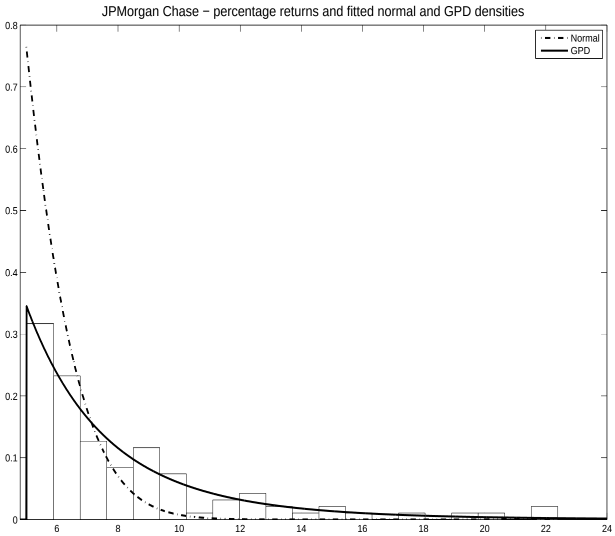
Applicazione 2

- Effettuiamo la stessa analisi sulla serie storica giornaliera dei rendimenti logaritmici dell'azione JPMorgan Chase per il periodo 1 gennaio 2000 - 31 dicembre 2011 ($n = 3130$, curtosi empirica $= 14.10$).
- Stime dei parametri:
  1. Normale: $\hat{\mu} = 0.009$, $\hat{\sigma} = 2.856$;
  2. GPD: $\hat{\xi} = 0.122$, $\hat{\beta} = 2.889$, utilizzando $u = 0.05$, che implica $n_u = 109$;

Applicazione 2



Applicazione 2



Applicazione 2

Tabella 2. JPMorgan: Probabilità di coda $P(r < c)$ e percentuali osservate per varie soglie c.

c	-4	-7	-10	-13	-15	-17	-19
Normal	8.01	0.70	< 0.01	< 0.01	< 0.01	< 0.01	< 0.01
GPD	-	1.79	0.72	0.32	0.19	0.12	0.08
Observed	5.30	1.76	0.64	0.32	0.19	0.16	0.13

Estensioni

- In un approccio condizionale al calcolo delle misure di rischio, si può adattare un modello ARMA-GARCH alla serie storica dei rendimenti e successivamente l'approccio POT ai residui.
- Una metodologia più generale estende la tecnica POT a modelli basati su processi stocastici puntuali; tuttavia nella maggior parte dei casi le serie storiche finanziarie non sono eventi puntuali nel tempo.
- L'EVT nel caso multivariato è principalmente basata sulle copule del valore estremo. Si tratta di un argomento dal grande potenziale per la ricerca sia teorica che applicata.

Estensioni

- Dal punto di vista teorico i seguenti problemi sono (in buona parte) aperti:
  1. L'estensione di tali copule dal caso bivariato al caso p-variato con $p > 2$, almeno per strutture di dipendenza generali;
  2. La stima;
  3. La simulazione.
- Dal punto di vista applicativo le copule del valore estremo sono di cruciale importanza per prezzare derivati di credito dipendenti da p sottostanti, quali i First-to-Default credit default swap.

Conclusioni

- L'EVT è un approccio con solidi fondamenti teorici e soddisfacente dal punto di vista empirico.
- Tuttavia:
  1. Stima solo la coda della distribuzione;
  2. Gli stimatori di massima verosimiglianza non si ottengono in forma chiusa;
  3. Non esistono criteri pienamente convincenti per la scelta della soglia u;
  4. L'estensione al caso multivariato è piuttosto complicata.

Bibliografia

McNeil, A.J., Frey, R. and Embrechts, P. (2005)
Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools.
Princeton University Press, Princeton.